圏論ノート

結城浩

https://cat.hyuki.net/

最終更新
2018 年 9 月 22 日

目次

お読みになる方への注意

この「圏論ノート」は、結城浩が個人的な勉強と実験のために書いているものです。数学的に一般的ではない表記法を用いていたり、誤りを含んでいたりしますので、そのつもりでお読みください。内容は予告なく大きく変更されます。何か気付いたことがありましたら、`Twitter:@hyuki` あてか、`https://msg.hyuki.net` 経由でコメントいただければ感謝です。

1 圏

1.1 圏・対象・射

- 圏 C は対象の集まり Object_C を持つ。
- 圏 C は射の集まり Arrow_C を持つ。
- 集まりは集合とは限らない。

1.2 ドメイン・コドメイン

- 圏 C の任意の射 f に対して、ドメインという対象 $\operatorname{dom} f \in \mathrm{Object}_C$ が存在する。
- ドメイン $\operatorname{dom} : \mathrm{Arrow}_C \to \mathrm{Object}_C$
- 圏 C の任意の射 $f \in \mathrm{Arrow}_C$ に対して、コドメインという対象 $\operatorname{cod} f \in \mathrm{Object}_C$ が存在する。
- コドメイン $\operatorname{cod} : \mathrm{Arrow}_C \to \mathrm{Object}_C$
- ドメインが a で、コドメインが b である射 f を、$f : a \to b$ や $a \xrightarrow{f} b$ と表す。
- たとえ $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g$ で $\operatorname{cod} f = \operatorname{cod} g$ だとしても $f = g$ とは限らない。

1.3 合成射

- 圏 C の任意の射 $f : a \to b$ と射 $g : b \to c$ に対して、合成射という射 $g \circ f \in \mathrm{Arrow}_C$ が存在する。
- 合成 $\circ : \mathrm{Arrow}_C \times \mathrm{Arrow}_C \to \mathrm{Arrow}_C$
- 合成 $\circ : (f, g) \mapsto g \circ f$
- 合成射 $g \circ f$ のドメインは f のドメインに等しい。
- $\operatorname{dom} g \circ f = \operatorname{cod} f$
- 合成射 $g \circ f$ のコドメインは g のコドメインに等しい。
- $\operatorname{cod} g \circ f = \operatorname{cod} g$
- 合成は結合法則 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ を満たす。

1.4 恒等射

- 圏 C の任意の対象 a に対して、a の恒等射という射 $\mathrm{id}_a \in \mathrm{Arrow}_C$ が存在する。
- 任意の射 $f : a \to b$ に対して $f \circ \mathrm{id}_a = f$ である。

- 任意の射 $f : a \to b$ に対して $\mathrm{id}_b \circ f = f$ である。

1.5 hom 集合

定義 1. 圏 C の対象 a, b に対し、a から b への射全体の集合 $\hom(a, b)$ を、

$$\hom(a, b) = \{\, f \in \mathrm{Arrow}_C \;\big|\; a = \mathrm{dom}\, f, b = \mathrm{cod}\, f \,\}$$

で定義する。これを hom 集合という。

2 関手

2.1 関手

- 圏 C と圏 B に対して、次のような対象関数 S と射関数 S が存在したとする。
- 文脈から区別できるので同じ名前にしているけれど、別名にした方が最初はわかりやすいかもしれない。
- 『圏論の基礎』では Sc と書いているけれど、$S(c)$ とした方が最初はわかりやすいかもしれない。
  - 対象関数 $S : \mathrm{Object}_C \to \mathrm{Object}_B, S : c \mapsto Sc$
  - 射関数 $S : \mathrm{Arrow}_C \to \mathrm{Arrow}_B, S : f \mapsto Sf$
  - 射関数 S は、圏 C の任意の対象 c について $S\mathrm{id}_c = \mathrm{id}_{Sc}$ を満たす。
  - 射関数 S は、圏 C の任意の合成可能な射 f, g について $S(g \circ f) = (Sg) \circ (Sf)$ を満たす。
- 関手 S はこのような対象関数 S と射関数 S の組からなる。
- 圏 C から圏 B への関手 $S : C \to B$ と表す。
- こういうふうに書いていくと、説明のための写像の $f : X \to Y$ と射の $f : X \to Y$ の表記が混乱しそうだな……

3 自然変換

- 関手 $S : C \to B$ と関手 $T : C \to B$ に対して次のような写像 τ が存在したとする。
  - 写像 $\tau : \mathrm{Object}_C \to \mathrm{Arrow}_B, \tau : c \mapsto \tau c$ で、射 $\tau c : Sc \to Tc$ となる。
  - 圏 C の任意の射 $f : c \to c'$ に対して、$\tau c' \circ Sf = Tf \circ \tau c$ が成り立つ。
  - ここに図式がほしいところである。
- このとき τc は c について自然であるという。
- このとき τ を自然変換という。

4 モニックとエピ

定義 2. 射 $f : a \to b$ を考える。任意の平行射 $g_1, g_2 : c \to a$ に対して、

$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \Longrightarrow g_1 = g_2$$

が成り立つとき、射 f は**モニック**であるという。

定義 3. 射 $f : a \to b$ を考える。任意の平行射 $g_1, g_2 : b \to c$ に対して、

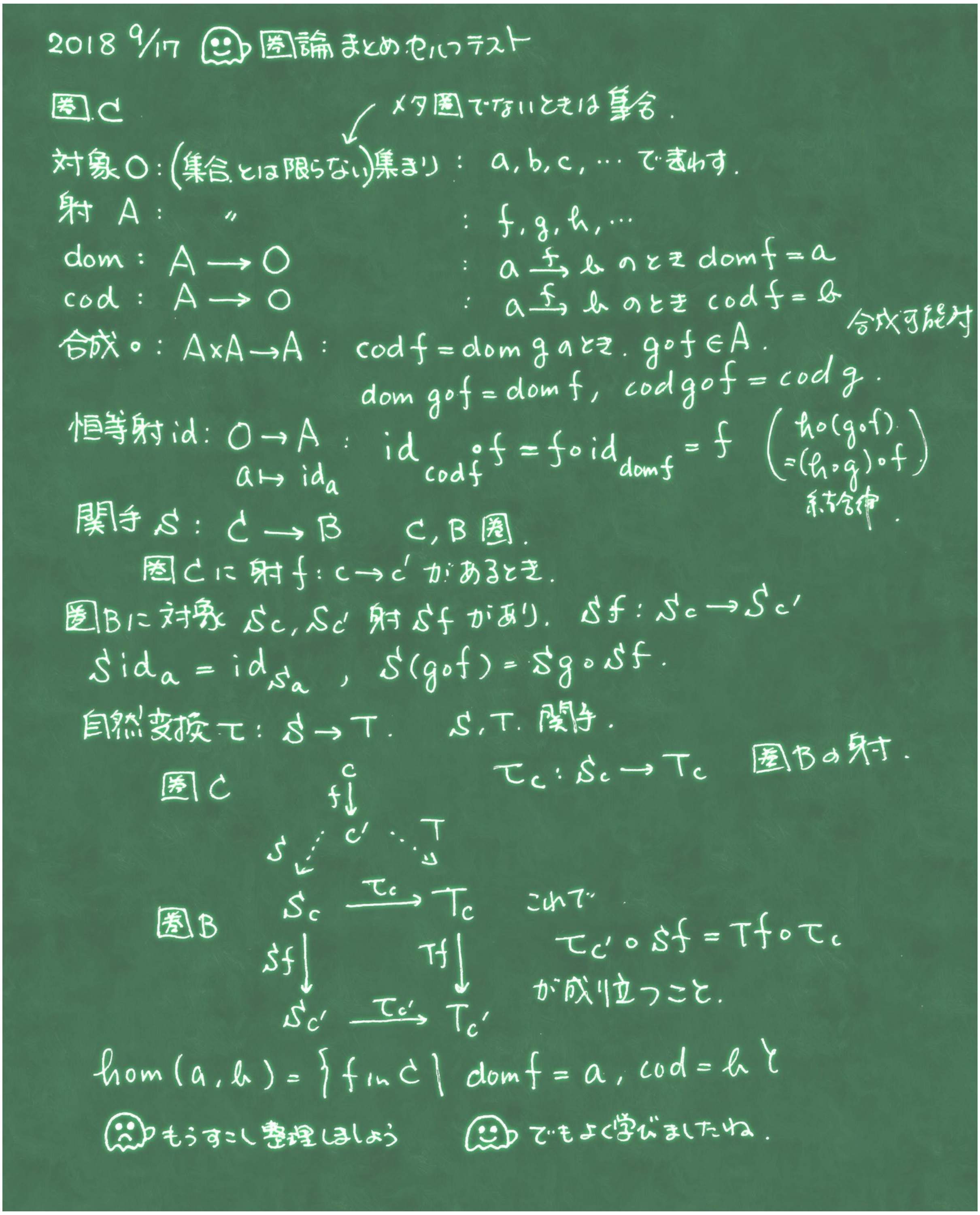
$$g_1 \circ f = g_2 \circ f \Longrightarrow g_1 = g_2$$

が成り立つとき、射 f は**エピ**であるという。

5 以降で書くこと

- 定義をより適切なマクロで……
- 平行射……
- 「集まり」……
- 集合を使った例……
- 図式……
- 無理に箇条書きにすると定義しにくいね。ふつうに文章にした方が定義を書きやすい。
- 概念の定義と、表記法を区別して書いた方がいい。

6　勉強中のノート画像



2018 9/17 圏論まとめセルフテスト
圏 C
メタ圏でないときは集合.
対象 O : (集合とは限らない)集まり : a, b, c, … で表わす.
射 A : 〃 : f, g, h, …
dom : A → O : a →f b のとき dom f = a
cod : A → O : a →f b のとき cod f = b
合成 ∘ : A×A → A : cod f = dom g のとき. g∘f ∈ A.
合成可能対
dom g∘f = dom f, cod g∘f = cod g.
恒等射 id : O → A : id_cod f ∘ f = f ∘ id_dom f = f
a ↦ id_a
(h∘(g∘f) = (h∘g)∘f) 結合律.
関手 S : C → B C, B 圏.
圏Cに射 f : c → c' があるとき.
圏Bに対象 Sc, Sc' 射 Sf があり. Sf : Sc → Sc'
S id_a = id_Sa , S(g∘f) = Sg∘Sf.
自然変換 τ : S → T. S, T 関手.
圏C
τc : Sc → Tc 圏Bの射.
c
f
c'
S
T
圏B
Sc
τc
Tc
Sf
Tf
Sc'
τc'
Tc'
これで
τc'∘Sf = Tf∘τc
が成立つこと.
hom(a, b) = {f in C | dom f = a, cod = b}
もうすこし整理しましょう
でもよく学びましたね.

参考文献と読書案内

TODO: 書誌情報はあとでちゃんと書く

[1] 『圏論の基礎』

[2] 『ベーシック圏論』

7 変更履歴

- 2018 年 9 月 18 日 — 圏、対象、射、ドメイン、コドメイン、合成射、恒等射などを書く。
- 2018 年 9 月 22 日 — モニック、エピなどを書く。definition 環境を利用。

索引